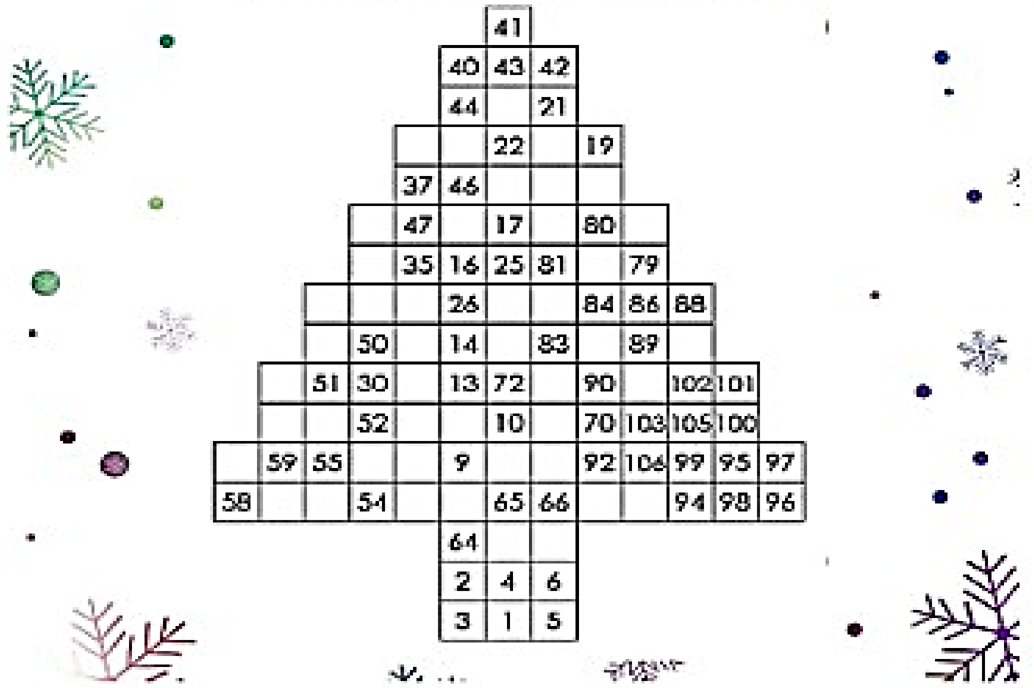
Adventní kalendář 2025

3. ročník

Příklad 24:

VÁNOČNÍ STROMEČEK - HIDOKU

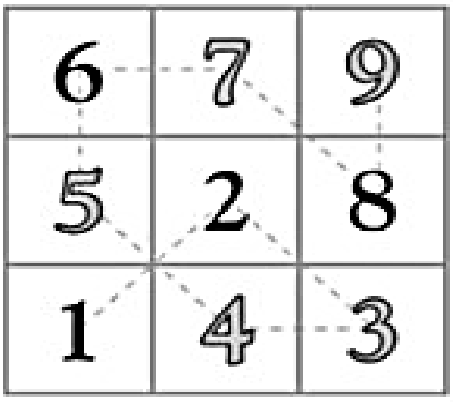
Doplňte chybějící čísla tak, aby každé číslo souviselo s dalším číslem vodorovně, svisle nebo diagonálně.



Ukázka řešení:

Hádanky Hidoku (původně vydané jako Hidato Puzzles) jsou výtvorem Dr. Gyory M. Benedeka, izraelského matematika. Hebrejské slovo „hida" znamená hádanku. V hádance hidato dostanete mřížku s výběrem čísel, která jsou již vyplněna.

Vaším úkolem je doplnit chybějící čísla tak, aby se každé číslo spojovalo s dalším číslem vodorovně, svisle nebo diagonálně. 1 se musí spojovat s 2, 2 se musí spojovat s 3 atd.

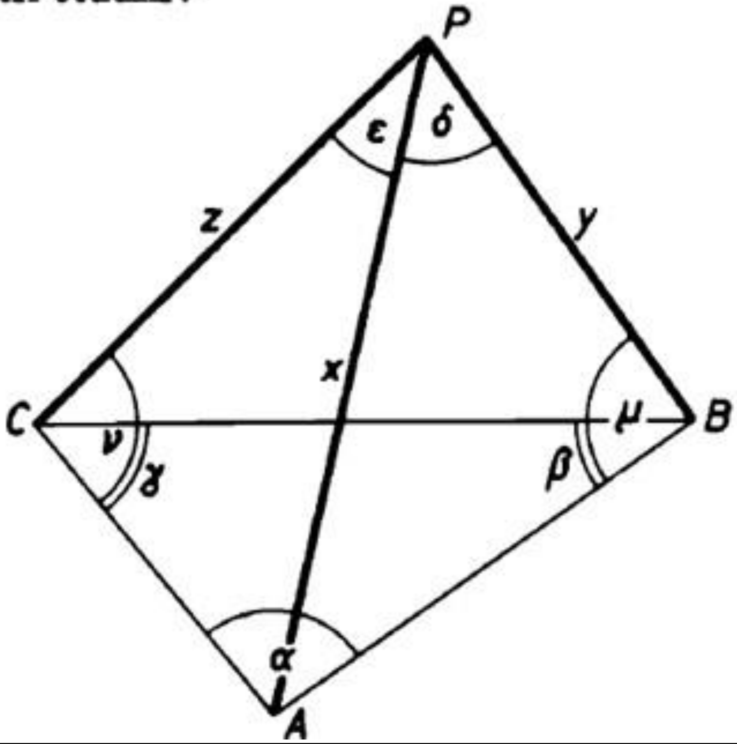


V okénku byla zadána čísla 1,2,6 a 8, ostatní se doplňují

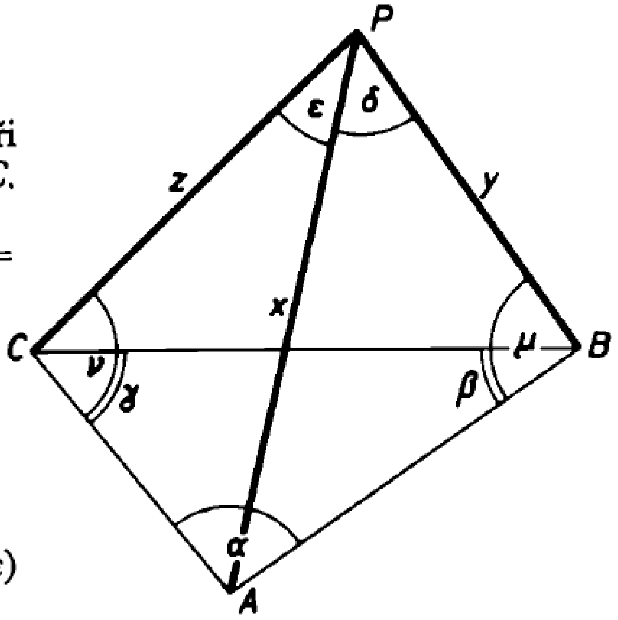
						41						
					40	43	42					
					44	39	21					
				45	38	22	20	19				
				37	46	23	18	77				
			36	47	24	17	76	80	78			
			48	35	16	25	81	75	79			
		49	34	15	26	82	74	84	86	88		
		33	50	27	14	73	83	85	89	87		
	32	51	30	28	13	72	71	90	104	102	101	
	56	31	52	29	12	10	91	70	103	105	100	
57	59	55	62	53	9	11	69	92	106	99	95	97
58	60	61	54	63	8	65	66	68	93	94	98	96
					64	7	67					
					2	4	6					
					3	1	5					

Příklad 23:

Tři sběrné studny A, B, C mají vzájemné vzdálenosti $BC = 272{,}91$ m, $AC = 227{,}37$ m, $AB = 212{,}4$ m, přičemž $\sphericalangle BAC = 76°38' = \alpha$, $\sphericalangle APB = 15°19' = \delta$, $\sphericalangle APC = 21°24' = \varepsilon$. Jak daleko je čerpací stanice P od všech tří studní?



Zavedeme si pomocný úhel μ při bodu B a úhel ν při vrcholu C.



Obr.

Potom $\dfrac{x}{\sin\mu} = \dfrac{c}{\sin\delta}$, $\dfrac{x}{\sin\nu} = \dfrac{b}{\sin\varepsilon}$, odtud $x = \dfrac{c\sin\mu}{\sin\delta} = \dfrac{b\sin\nu}{\sin\varepsilon} \ldots (1)$.

Protože $\mu + \nu = 360° - (\alpha + \delta + \varepsilon)$ je $\dfrac{\mu+\nu}{2} = 180° - \dfrac{\alpha+\delta+\varepsilon}{2}$.

Z posledních dvou rovnic je možno určit velikost úhlů μ, ν. Výpočet je zvlášť jednoduchý, když je možno výraz (1) vyjádřit jako funkci $\dfrac{\mu-\nu}{2}$.

Proto položíme $\sin\mu = kb\sin\delta$, $\sin\nu = kc\sin\varepsilon$ a napíšeme

$$\frac{\sin\mu - \sin\nu}{\sin\mu + \sin\nu} = \frac{kb\sin\delta - kc\sin\varepsilon}{kb\sin\delta + kc\sin\varepsilon}.$$

Z toho $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\mu-\nu}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\mu+\nu}{2}} = \dfrac{b\sin\delta - c\sin\varepsilon}{b\sin\delta + c\sin\varepsilon} = p.$

V našem případě je tedy $\operatorname{tg}\dfrac{\mu-\nu}{2} = p\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\delta+\varepsilon}{2}$, kde $\dfrac{\alpha+\delta+\varepsilon}{2} = 56°40'30''$. $\dfrac{\mu-\nu}{2} = 10°54'51''$

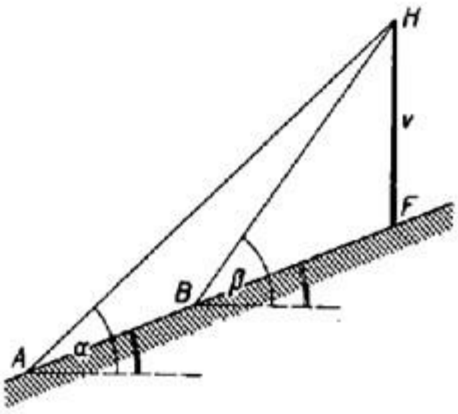
Z této rovnice a podmínky $\dfrac{\mu+\nu}{2} = 123°19'30''$ dostaneme $\mu = 134°14'21''$, $\nu = 112°24'39''$.

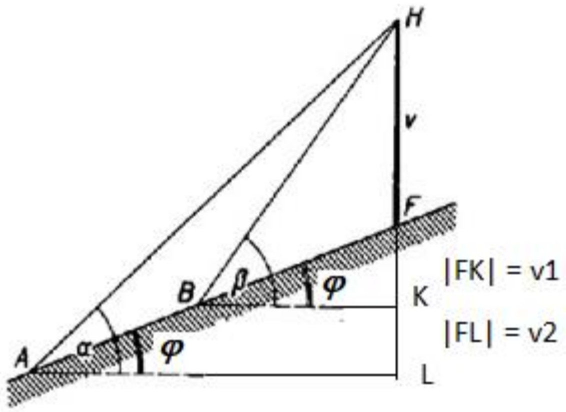
Ze vztahu (1) máme pak $x = 576{,}1$ m. Pomocí sinové věty získáme i velikost $y = 407{,}4$ m a $z = 449{,}7$ m.

Čerpací stanice P je od studně A vzdálena 576,1m, od studně B 407,4 m a od studně C 449,7 m.

Příklad 22:

Od paty vysílací věže F stojící na kopci byla po svahu změřena vzdálenost $FB = 56$ m a dále za bod B ve stejném směru vzdálenost $BA = 38$ m Vrchol vysílací věže H byl z bodů A, B zaměřen v úhlech $\alpha = 22°$, $\beta = 32°$. Určete výšku věže i úhel sklonu návrší





$$\sin\varphi = \frac{v1}{56} \Rightarrow v1 = 56\cdot\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{v2}{38} \Rightarrow v2 = 38\cdot\sin\varphi$$

$$v1 + v2 = 94\cdot\sin\varphi$$

$$tg22^\circ = \frac{v + v1 + v2}{94\cos\varphi} = \frac{v + 56\sin\varphi + 38\sin\varphi}{94\cos\varphi}$$

$$tg32^\circ = \frac{v + v1}{56\cos\varphi} = \frac{v + 56\sin\varphi}{56\cos\varphi}$$

Rovnice odečteme dostaneme rovnici pro výpočet φ:

$$\cos\varphi\cdot\left(94\cdot tg22^\circ - 56\cdot tg32^\circ\right) = v + 94\cdot\sin\varphi - v - 56\cdot\sin\varphi$$

použijeme zaokrouhlení při jednotlivých výpočtech

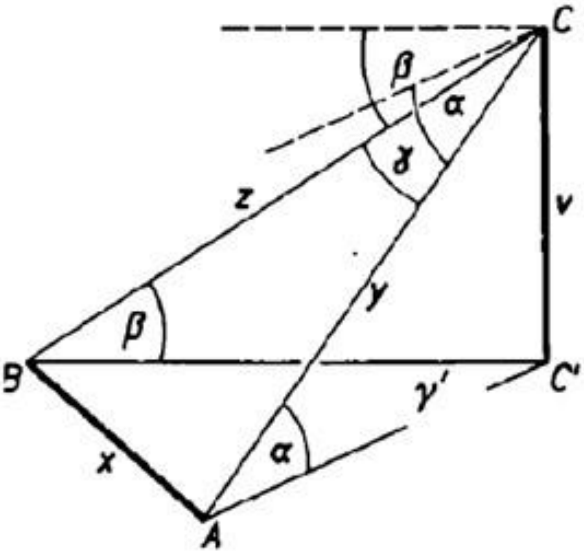
$$3\cos\varphi = 38\sin\varphi \Rightarrow \frac{3}{38} = tg\varphi \Rightarrow \varphi = 4^\circ30'50''$$

Ze sinové věty určíme výšku věže:

$$\frac{v}{\sin(22^\circ - \varphi)} = \frac{94}{\sin 68^\circ} \Rightarrow v = \frac{94\cdot\sin 17^\circ29'10''}{\sin 68^\circ} \approx 30{,}5m$$

Příklad 21:

Z vrcholu kopce, který má výšku $v = 150$ m nad horizontální rovinou, vidíme dvě místa A, B v té rovině v hloubkových úhlech $\alpha = 30°, \beta = 45°$, jejich vzdálenost AB v úhlu $\gamma' = 60°$ (průmět úhlu γ).
Jak velká je tato vzdálenost?



Vrchol kopce označme C. Vzdálenost $CA = y$, vzdálenost $CB = z$, vzdálenost $AB = x$. Položme $C'A = a, C'B = b$.
Potom $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma'$; $a = v \,.\, \text{cotg}\, 45°$ $b = v \,.\, \text{cotg}\, 30°$

$$x^2 = 150^2 \,.\, 3 + 150^2 - 2 \,.\, 150^2 \,.\, \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 150^2 (4 - \sqrt{3}),$$

$$x = 150 \,.\, \sqrt{2{,}26} \doteq 225$$

Vzdálenost míst A, B je přibližně 225 m.

Příklad 20:

Nepřístupný bod C v rovině byl zaměřen ze dvou stanovišť A, B, jejichž vzdálenost je $c = 56$ m, pod úhly $BAC = 49°57'$, $ABC = 68°20'$. Jaká je vzdálenost bodu C od obou pozorovatelen?

Existuje-li řešení, označme vzdálenost $AC = b$, vzdálenost $BC = a$.
Ze sinové věty pak dostáváme $a = \dfrac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$, $b = \dfrac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$.

$c = 56$
$\alpha = 49°57'$
$\beta = 68°20'$

$a = ?; b = ?;$

$a = 48{,}7$ m
$b = 59{,}1$ m

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

Bod C je vzdálen od zaměřovacího bodu A 59,1 m, od bodu B 48,7 m.

Příklad 19:

V trojúhelníku je strana a třikrát tak velká jako strana b. Jak velký je úhel β, je-li $\alpha = 45°12'13''$?

Ze sinovy věty:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\sin\left(45°12'13''\right)}{3} = 0{,}236538$$

$$\beta = 13°40'57''.$$

Příklad 18:

Vypočtěte obsah S, poloměr kružnice vepsané ϱ a poloměr kružnice opsané r trojúhelníku ABC, v němž je dáno:

a) $a = 5,\ b = 6,\ c = 7$;

b) $c = 15,\ \alpha = 62°10',\ \beta = 18°40'$.

VÝSLEDKY

a	5 cm
b	6 cm
c	7 cm
α	44.415 °
β	57.122 °
γ	78.463 °
h_c	4.199 cm
ϱ	1.633 cm
R	3.572 cm
S	14.697 cm²
O	18 cm

VÝSLEDKY

a	13.436 cm
b	4.863 cm
c	15 cm
α	62.167 °
β	18.667 °
γ	99.166 °
h_c	4.301 cm
r	1.937 cm
R	7.597 cm
S	32.254 cm²
O	33.299 cm

Příklad 17:

Na domě jsou dva řádky nápisu. Horní z nich má spodní okraj ve výši 30 m, druhý 15 m nad vodorovnou rovinou. Jak vysoká musí být písmena v prvním i druhém řádku, mají-li být stejně čitelná jako písmena vysoká 80 cm z místa vzdáleného 30 m od příslušné stěny domu ve vodorovném směru ve výšce očí, tj. 1,5 m?

1. Parametry referenčního pozorování

V referenčním bodě (ve výšce očí) se na písmena díváme kolmo.

- **Vzdálenost (x):** 30 m
- **Výška písma (h_{ref}):** 0,8 m
- **Zorný úhel (α):** $\alpha \approx \frac{h_{ref}}{x} = \frac{0,8}{30}$ rad (cca $1,53°$).

2. Geometrie pro nápisy ve výšce

Když je písmo ve výšce H a oči v $1,5$ m, tvoří svislý rozdíl od očí $y = H - 1,5$. Skutečná vzdálenost oka od paty písmene je přepona $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Protože písmo je svislé a pohled šikmý, svírá paprsek s rovinou písma úhel φ. Pro zorný úhel α platí vztah:

$$\alpha = \frac{h \cdot \cos(\varphi)}{r}$$

Kde $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$. Po dosazení dostáváme finální vzorec pro výšku písma h:

$$h = \frac{\alpha \cdot r^2}{x} = \frac{\alpha \cdot (x^2 + y^2)}{x}$$

3. Výsledné hodnoty po dosazení

Pro vodorovnou vzdálenost **30 m** a referenční úhel **0,8/30** vychází:

- **Horní řádek (výška 30 m):**
  - Svislý rozdíl od očí: $y = 30 - 1,5 = 28,5$ m
  - Výpočet: $h_1 = \frac{0,8}{30} \cdot \frac{30^2 + 28,5^2}{30} = \frac{0,8 \cdot 1712,25}{900} \approx \mathbf{1,522}$ m
- **Dolní řádek (výška 15 m):**
  - Svislý rozdíl od očí: $y = 15 - 1,5 = 13,5$ m
  - Výpočet: $h_2 = \frac{0,8}{30} \cdot \frac{30^2 + 13,5^2}{30} = \frac{0,8 \cdot 1082,25}{900} \approx \mathbf{0,962}$ m

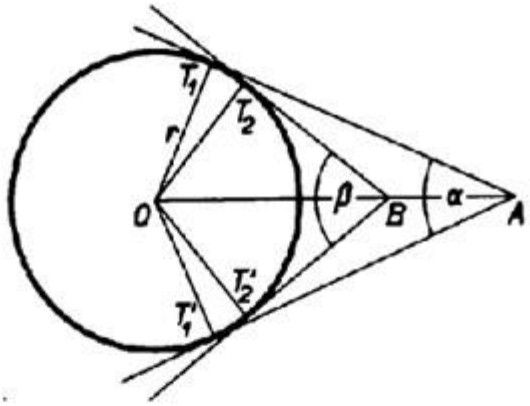
Písmena musí být vysoká – ve výšce 15 m ….. cca 1m,
ve výšce 30 m ….. cca 1,6 m

Příklad 16:

Kouli vidíme z jistého bodu v zorném úhlu $\alpha = 37°12'58''$. Přiblížíme-li se k ní o délku $d = 1$ m, vidíme ji v zorném úhlu $\beta = 48°36'18''$. Jaký je její objem?

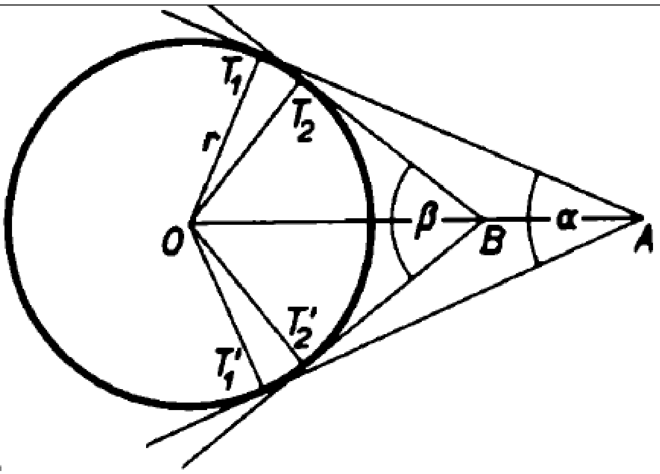
Objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

d = vzdálenost bodů A a B



Řešení (obr. 55)

Objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Poloměr této koule určíme z pravoúhlých trojúhelníků OAT_1, OBT_2, kde O je střed koule, A,B jsou pozorovací body, T_1, T_2 body dotyku tečen vedených z bodů A, B. Potom platí



Obr. 55

$$r = OA \,.\, \sin\frac{\alpha}{2}, r = OB \,.\, \sin\frac{\beta}{2}. \qquad (1)$$

$$r\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = d \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2},$$

$$r = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} d = \frac{d\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{4} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{4}}.$$

Odtud dostaneme

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{4} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{4}}\right)^3.$$

Pro naše hodnoty $\frac{\alpha}{2} = 18°36'29''$, $\frac{\beta}{2} = 24°18'09''$, $\frac{\beta+\alpha}{4} = 21°27'19''$,

$\frac{\beta-\alpha}{4} = 2°50'50'' = 10\,250''$.

Objem pozorované koule je $V = 12\ m^3$.

Příklad 15:

Dokažte, že pro úhly trojúhelníka platí:

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha \,.\, \operatorname{tg} 2\beta \,.\, \operatorname{tg} 2\gamma$$

Položíme

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ - 2\gamma \quad \text{.... aplikujeme na rovnici funkci tg}$$

$$tg(2\alpha + 2\beta) = tg(360^\circ - 2\gamma)$$

$$tg(2\alpha + 2\beta) = -tg2\gamma$$

$$tg2\alpha + tg2\beta + tg2\gamma = tg2\alpha + tg2\beta - tg(2\alpha + 2\beta) =$$

$$= tg2\alpha + tg2\beta - \frac{tg2\alpha + tg2\beta}{1 - tg2\alpha \cdot tg2\beta} = (tg2\alpha + tg2\beta)\cdot\left(1 - \frac{1}{1 - tg2\alpha \cdot tg2\beta}\right) =$$

$$= (tg2\alpha + tg2\beta)\cdot\frac{-tg2\alpha \cdot tg2\beta}{1 - tg2\alpha \cdot tg2\beta} = \frac{tg2\alpha + tg2\beta}{1 - tg2\alpha \cdot tg2\beta}\cdot(-tg2\alpha \cdot tg2\beta) = tg2\alpha \cdot tg2\beta \cdot tg2\gamma$$

Příklad 14:

Dokažte:

$$2 \sin \alpha + \sin 2\alpha = 4 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\left\{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\ \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right\}$$

$$2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha(1 + \cos\alpha) =$$

$$= 2\sin\alpha\left(1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = 4\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Příklad 13:

Upravte na součin: $\sin\alpha + \cos\alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha$

Daný výraz nejprve upravíme takto:

$$(\sin\alpha + \sin 3\alpha) + (\cos\alpha + \cos 3\alpha) + (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) =$$
$$= 2\sin 2\alpha\cos\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\cos 2\alpha =$$
$$= (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)\,.\,(2\cos\alpha + 1) =$$
$$= 2(\cos\alpha + \cos 60^\circ)\,.\,(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) =$$
$$= 2(\cos\alpha + \cos 60^\circ)\,[\cos(90^\circ - 2\alpha) + \cos 2\alpha] =$$
$$= 4\cos\frac{\alpha + 60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha - 60^\circ}{2}\,.\,2\cos 45^\circ\cos(45^\circ - 2\alpha) =$$
$$= 4\sqrt{2}\cos\frac{\alpha + 60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha - 60^\circ}{2}\cos(45^\circ - 2\alpha)$$

Příklad 12:

Aniž počítáte velikost úhlu φ, určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li dáno: $\cos\varphi = \frac{12}{13}$, pro $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$

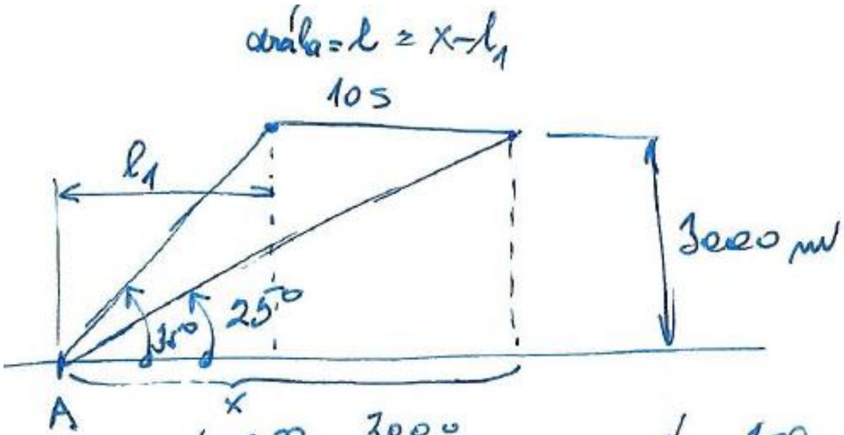
Ve čtvrtém kvadrantu mají všechny zbývající funkce, tj. $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{cotg}\varphi$ záporné hodnoty. Podle vztahu

$$\sin^2\varphi = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} \quad \sin\varphi = -\frac{5}{13}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{5}{13} : \frac{12}{13} = -\frac{5}{12}$$
$$\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{12}{5}$$

Hledané hodnoty jsou: $\sin\varphi = \frac{-5}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{12}{5}$

Příklad 11:

Letadlo letí vodorovně ve směru na baterii ve výšce 3 000 m. Při prvém měření byl zjištěn polohový úhel 25°, při druhém měření provedeném po deseti sekundách byl zjištěn polohový úhel 35°. Určete rychlost letadla.



$tg\,25^\circ = \frac{3000}{x}$

$tg\,35^\circ = \frac{3000}{\underbrace{(x-l)}_{l_1}}$

$tg\,35^\circ = \frac{3000}{l_1}$

$\underline{l_1} = \frac{3000}{tg\,35^\circ} = 4284{,}444\ m$

$\underline{x} = \frac{3000}{tg\,25^\circ} = 6433{,}521\ m$

Za 10 s uletělo letadlo

$l = 2149{,}076\ m$

$s = v \cdot t$

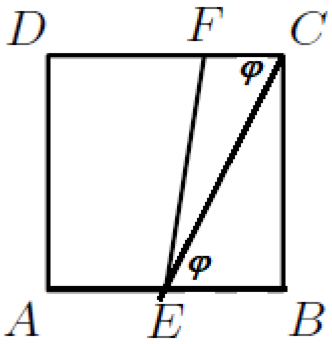
$2149{,}07 = v \cdot 10$

$\underline{v \doteq 215\ m/s}$

Letadlo letělo přibližně rychlostí 215 m/s

Příklad 10:

Trojúhelník CEF, který je vepsán do čtverce $ABCD$ o straně a tak, že bod E je střed strany AB a bod F je na straně CD, má obsah $S = \frac{1}{6}a^2$. Určete velikost úsečky CF.



Určíme délku EC: platí $|EC|^2=|EB|^2+|BC|^2$

$$|EC|^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=\frac{5a^2}{4}$$, úhel u vrcholu E φ:

$$tg\varphi=\frac{a}{\frac{a}{2}}=2 \Rightarrow \sin\varphi=\frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

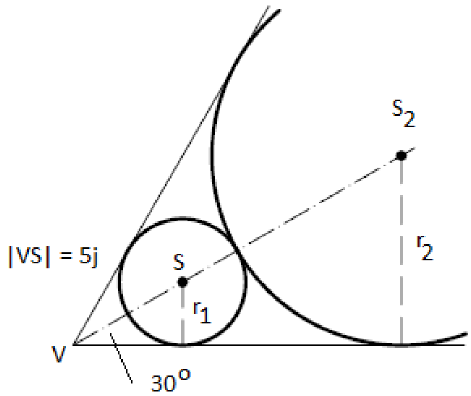
Plocha EFC = $\frac{1}{6}a^2$, ale také $\frac{1}{2}|FC|\cdot|EC|\cdot\sin\varphi$

$$\frac{1}{6}a^2=\frac{1}{2}|FC|\cdot\frac{\sqrt{5}\cdot a}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$|FC|=\frac{1}{3}\cdot a$$

Příklad 9:

Do úhlu velikosti 60° jsou vepsány dva dotýkající se kruhy. Vzdálenost středu menšího kruhu od vrcholu úhlu je $5j$. Určete poměr obsahů obou kruhů.



$$|VS_2|=5+r_1+r_2$$

$$\sin 30^\circ=\frac{r_2}{|VS_2|}=\frac{r_1}{5}=\frac{1}{2}$$

$$r_1=\frac{5}{2} \quad pak \quad |VS_2|=5+\frac{5}{2}+r_2=\frac{15}{2}+r_2$$

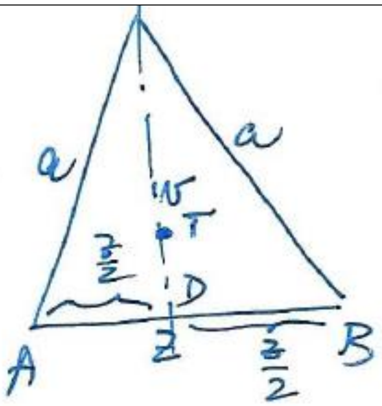
$$|VS_2|=2r_2 \Rightarrow r_2=\frac{15}{2}$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{\frac{S_2}{S_1}}=\frac{1}{\frac{\pi\left(\frac{15}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\frac{225}{25}}=\frac{1}{9}$$

Poměr obsahů obou kruhů je $\frac{1}{9}$

Příklad 8:

V rovnoramenném trojúhelníku ABC je poměr délek základy AB a výšky na základnu 10 : 12. Rameno má délku 26 cm. Jestliže T je těžištěm trojúhelníku ABC, určete obsah trojúhelníku ABT.



$\frac{z}{v} = \frac{10}{12}$

$12z = 10v$

$6z = 5v$

$\Downarrow$

$v = \frac{6z}{5}$

$a = 26\,cm$

Platí:

$a^2 = v^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$

$26^2 = \left(\frac{6z}{5}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$

$26^2 = \frac{36z^2}{25} + \frac{z^2}{4} \quad / \cdot 100$

$100 \cdot 26^2 = 144z^2 + 25z^2$

$100 \cdot 26^2 = 169z^2 \quad / \sqrt{\ }$

$10 \cdot 26 = 13z$

$\underline{z = 20\,cm}$

Výška je současně těžnicí, těžiště T je $\frac{1}{3}$ od základny

$v = \frac{6 \cdot 20}{5} = 24\,cm$

$|TD| = \frac{1}{3} v = 8\,cm$

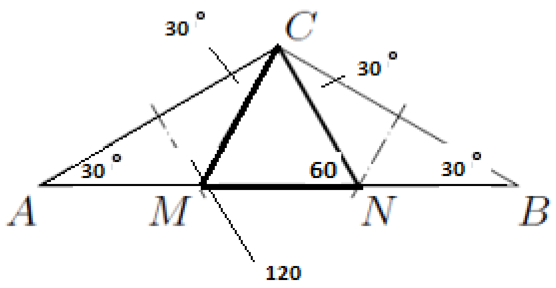
Plocha $\triangle ATB = \frac{1}{2} z \cdot |TD| = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8\,cm$

$\underline{S = 80\,cm^2}$

Plocha hledaného trojúhelníku ABT je $80cm^2$

Příklad 7:

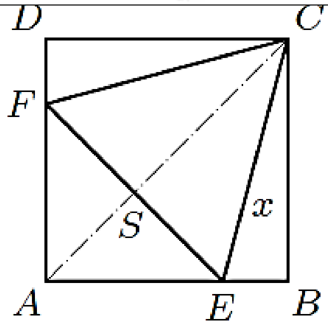
Úhly při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABC mají velikost $30°$. Průsečíky os ramen AC a BC se základnou AB označíme M, N. Určete vnitřní úhly v trojúhelníku MNC.



Trojúhelník MNC je rovnostranný, všechny úhly mají velikost $60°$.

Příklad 6:

Do čtverce $ABCD$ o straně a je vepsán rovnostranný trojúhelník EFC tak, aby $E \in AB$, $F \in AD$.
Určeme poměr stran čtverce a trojúhelníku.



Označme x stranu trojúhelníku EFC. Protože přímka AC je osou strany EF, jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky AES, AFS shodné. Jejich odvěsny mají velikost $\frac{1}{2}x$. Pro výšku CS trojúhelníku EFC platí

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = a\sqrt{2} - \frac{x}{2}.$$

Odtud vypočítáme

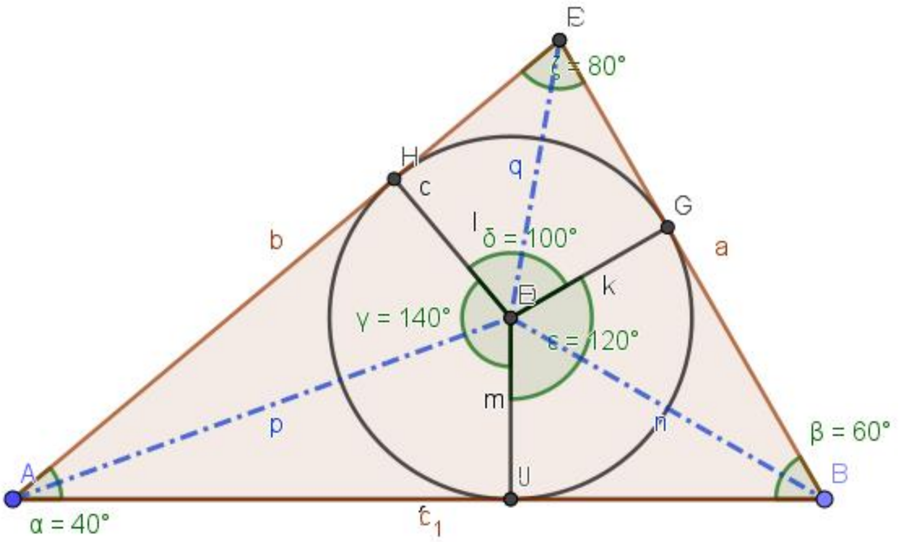
$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\,a.$$

Hledaný poměr stran čtverce a trojúhelníku tedy je

$$a : x = (\sqrt{3}+1) : 2\sqrt{2}\,.$$

Příklad 5:

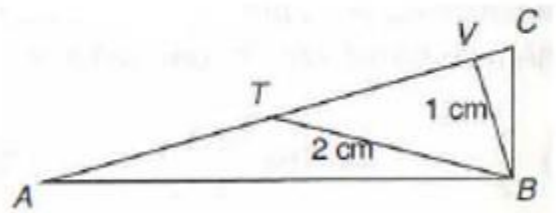
Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku KLM jsou v poměru 2 : 3 : 4. Do tohoto trojúhelníku je vepsána kružnice ρ. Body dotyku kružnice ρ se stranami trojúhelníku dělí kružnici na tři oblouky. Určete poměr délek těchto oblouků.



Oblouky jsou v poměru: 5 : 6 : 7

Příklad 4:

V pravoúhlém trojůhelníku ABC je délka výšky BV dlouhá 1 cm, těžnice BT má délku 2 cm. Jakou velikost má úhel u vrcholu A (úhel α)?



Krok 1: Vlastnosti těžnice v pravoúhlém trojúhelníku

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu B platí, že délka těžnice na přeponu BT je rovna polovině délky přepony AC. Protože $BT = 2$ cm, platí:

$$AC = 2 \cdot BT = 4 \text{ cm}$$

Zároveň platí, že body A, B, C leží na Thaletově kružnici se středem T, tedy $AT = BT = CT = 2$ cm. Trojúhelník ABT je proto rovnoramenný s rameny AT a BT.

Krok 2: Výpočet úhlu v trojúhelníku BVT

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník BVT, kde BV je výška na přeponu ($BV \perp AC$). V tomto trojúhelníku známe délku odvěsny $BV = 1$ cm a délku přepony $BT = 2$ cm. Pro úhel $\angle BTV$ (označme jej ω) platí:

$$\sin(\omega) = \frac{BV}{BT} = \frac{1}{2}$$

Z toho vyplývá, že $\omega = 30^\circ$. Tento úhel ω je úhlem mezi těžnicí a výškou.

Krok 3: Určení úhlu při vrcholu A

V rovnoramenném trojúhelníku ABT jsou úhly při základně AB shodné, tedy $\angle BAT = \angle ABT = \alpha$. Úhel ω (nebo jeho doplněk) je vnějším úhlem k trojúhelníku ABT při vrcholu T, nebo lze využít vztahu, že úhel mezi výškou a těžnicí z pravého úhlu je roven $|\alpha - \gamma|$.

1. Pokud úhel $\omega = 30^\circ$ odpovídá vnějšímu úhlu k $\triangle ABT$, pak $2\alpha = 30^\circ$, tedy $\alpha = 15^\circ$.

2. Pokud je úhel 30° doplňkem, pak $2\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, tedy $\alpha = 75^\circ$.

Příklad 3:

Kružnice poloměru $\rho = 6$ cm je opsán trojúhelník, jehož strany jsou v poměru 5 : 5,6: 3,4. Stanovte délky jeho stran.

Délky stran označíme a = 5.k, b = 5,6.k, c = 3,4.k a výpočet plochy provedeme podle Heronova vzorce:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5k + 5,6k + 3,4k}{2} = 7k$$

$$s - a = 7k - 5k = 2k$$

$$s - b = 7k - 5,6k = 1,4k$$

$$s - c = 7k - 3,4k = 3,6k$$

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{7k \cdot 2k \cdot 1,4k \cdot 3,6k}$$

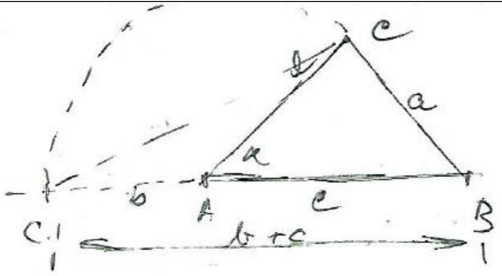
$$S = 8,4k^2$$

$$\rho = \frac{S}{s} = \frac{8,4k^2}{7k} = 1,2k \Rightarrow k = \frac{\rho}{1,2} \Rightarrow k = \frac{6}{1,2} = 5$$

Strany trojúhelníku jsou a = 25j, b = 28j, c = 17j

Příklad 2:

Řešte trojúhelník, v němž je dáno: $P = 84$ j², $b + c = 28$ j, $\alpha = 59°29'23''$. Jaká je velikost stran tohoto trojúhelníka?



$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \Rightarrow bc \sin\alpha = 168$$

$$bc = \frac{168}{\sin\alpha} = \frac{168}{\sin 59°29'23''} = 195$$

Máme 2 rovnice:

$$b + c = 28$$
$$b \cdot c = 195$$
$$b(28 - b) = 195$$
$$28b - b^2 = 195$$
$$0 = b^2 - 28b + 195$$
$$b_1 = 15 \qquad b_2 = 13$$
$$c_1 = 13 \qquad c_1 = 15$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} b = 15; & c = 13; \\ b = 13; & c = 15. \end{array}}$$

Určení strany a:

Platí z kosinové věty:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \cos 59°29'23'' =$$

$$a^2 = 196 \Rightarrow a = 14j$$

Hledané rozměry jsou. a = 14j, b= 13j , c = 15j

Příklad 1:

Jaké jsou strany trojúhelníku, jež se dají vyjádřit třemi po sobě jdoucími čísly, když plocha trojúhelníku je 84 cm^2?

Délky stran označíme x - 1, x, x + 1 a výpočet provedeme podle Heronova vzorce:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{x-1+x+x+1}{2} = \frac{3}{2}x$$

$$s-a = \frac{3}{2}x-(x-1) = \frac{1}{2}x+1$$

$$s-b = \frac{3}{2}x-x = \frac{1}{2}x$$

$$s-c = \frac{3}{2}x-(x+1) = \frac{1}{2}x-1$$

$$S = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = \sqrt{\frac{3}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)} \quad \ldots\ldots \ |^2$$

$$84^2 = \frac{3}{4}x^2\cdot\left(\frac{1}{4}x^2-1\right) \Rightarrow 9408 = \frac{3}{16}x^4-\frac{3}{4}x^2 \quad \ldots\ldots \ |\cdot 16$$

$$3x^4-12x^2-112896=0 \quad |:3$$

$$x^4-4x^2-37362=0 \Rightarrow (x-14)\cdot(x+14)\cdot(x^2+192)=0$$

$$x^4-4x^2-37362=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 14 \ a\ 2\ komplexní\ kořeny$$

Vyhovuje x= 14 cm

Strany trojúhelníku jsou 13 cm, 14 cm, 15 cm